Schema riassuntivo: I PASSI PER LO STUDIO DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

0. Può darsi che il grafico della funzione f da studiare si possa ricavare con "manipolazioni" a partire dal grafico (già noto o comunque molto più facile da tracciare) di una funzione più semplice g(x). Ad esempio, ciò avviene se f è della forma

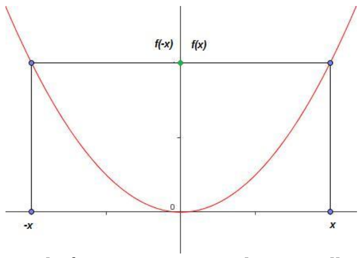
$$g(x)+k, \quad k\cdot g(x), \quad g(x+k), \quad g(kx),$$

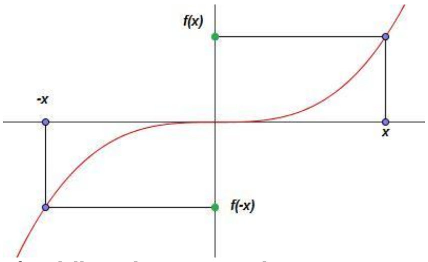
$$a\cdot g(x)+b, \quad g(ax+b), \quad \frac{1}{g(x)}, \quad |g(x)|, \quad \sqrt[n]{g(x)}, \quad [g(x)]^n, \quad a^{g(x)}, \quad \log_a g(x), \quad ecc.$$

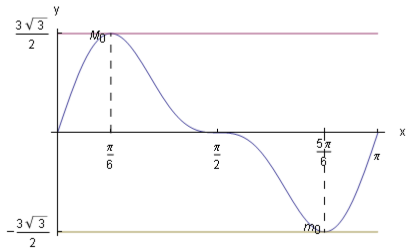
- Bisogna comunque valutare *se valga la pena* di impostare un lavoro di questo tipo, tenendo conto della difficoltà delle manipolazioni; a volte, questo approccio "dà subito un'idea" - utilissima - dell'andamento della f, ricavato da quello della g, ma per la determinazione dei massimi, minimi ecc. sarà poi necessario ricorrere alle tecniche esposte ai punti successivi di questo schema.

1. Determinare il dominio D della funzione (vedi tabella)

2. Chiedersi se la funzione
   - è pari: $f(-x)=f(x)$ e quindi ha grafico simmetrico rispetto all'asse y
   - dispari: $f(-x)=-f(x)$ e quindi ha grafico simmetrico rispetto all' origine
   - oppure né pari né dispari







Nel caso la funzione sia pari o dispari, nelle varie fasi dello studio potremo e dovremo tenere presente la simmetria riscontrata; potremmo addirittura decidere di studiare la funzione soltanto per $x \geq 0$ e poi completarne il grafico per simmetria (la convenienza di procedere in questo modo dipende dalle nostre preferenze, e dalla particolare funzione di volta in volta considerata).

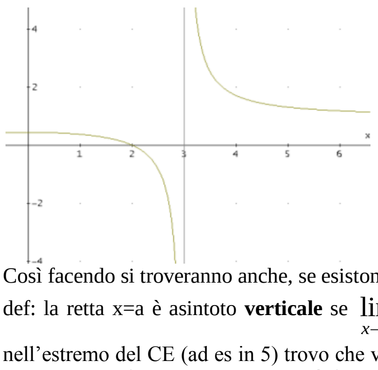
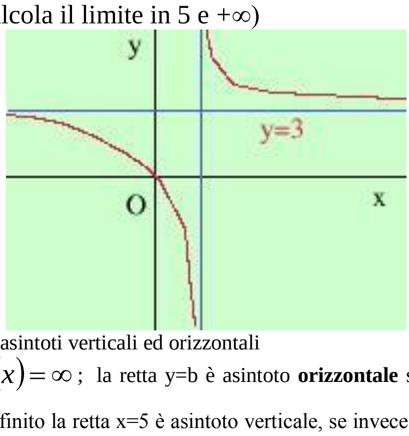
- è periodica;

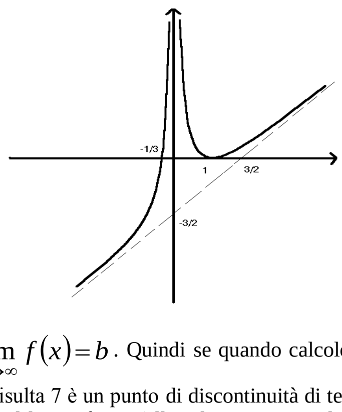
in caso affermativo, basterà studiarla su di un intervallo di ampiezza T (essendo T il periodo).Ricordare comunque che, se ad es. si lavora sull'intervallo $[0,2\pi]$, sarà sempre conveniente, nei vari schemi, andare anche "leggermente a sinistra di 0" e "leggermente a destra di 2π "

3. Determinare le intersezioni con gli assi
   Per l'eventuale intersezione con l'asse verticale si porrà x=0 (se, beninteso, l'ascissa 0 appartiene al dominio!) e si ricaverà il corrispondente valore di y
   Per le eventuali intersezioni con l'asse orizzontale si dovrà risolvere l'equazione f(x) = 0.

4. Studiare il segno della funzione mediante la disequazione f(x) > 0.
   Ricordare che, se la risoluzione di tale disequazione comporta l'utilizzo di uno schema, in tale schema converrà riportare anche gli eventuali confini finiti del dominio, ed eliminare subito, sbarrandole, le "**parti dell'asse x dove la funzione non esiste**".

5. Calcolare i limiti ai confini del dominio (all'infinito, se il dominio è un insieme aperto, e negli estremi del CE cioè nei punti esclusi: esempio se CE è x>5 si calcola il limite in 5 e $+\infty$)



Così facendo si troveranno anche, se esistono, gli asintoti verticali ed orizzontali
def: la retta x=a è asintoto **verticale** se $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$; la retta y=b è asintoto **orizzontale** se $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$. Quindi se quando calcolo il limite nell'estremo del CE (ad es in 5) trovo che vale infinito la retta x=5 è asintoto verticale, se invece mi risulta 7 è un punto di discontinuità di terza specie (non esiste la funzione ma il limite è finito). Quando invece calcolo il limite all'infinito posso avere: il limite finito (allora la retta y= quel valore del limite è asintoto orizzontale per la funzione) se il limite è infinito allora non ho asintoto orizzontale ma POSSO (non devo) avere l'asintoto obliquo.

6. Ricercare gli eventuali asintoti obliqui
   Osserviamo che, evidentemente, avrà senso ricercare un eventuale asintoto obliquo per la funzione y = f(x) soltanto se si è constatato che la funzione tende a infinito quando x tende a infinito. Ricordiamo ancora il Teorema sul quale si basa il procedimento di ricerca

degli eventuali asintoti obliqui. Teorema: La retta obliqua **y = mx + q** è asintoto obliquo per la funzione y = f(x) se e solo se esiste finito e diverso da zero il $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ ed esiste finito il $\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = q$

Ricercare (utilissimo!) <u>le eventuali intersezioni del grafico con gli asintoti</u> (obliqui od orizzontali). Questa è importante se non ho ancora chiaro il comportamento della funzione e mi permette di capire se l'asintoto è un vero separatore del grafico.

7. Calcolare la derivata prima y' = f ' (x). Poi:

a) Controllare se il dominio D' della y ' coincide con quello della y

Tale dominio D' potrebbe essere più ristretto del dominio D della funzione ; ciò significherebbe che in certi punti la funzione esiste, ma non è derivabile. Sono punti di discontinuità della derivata. Eventuali punti di questo tipo sono <u>sempre interessanti</u>! Si potrà trattare di: flessi verticali, cuspidi, punti angolosi…VEDIAMO Più sotto

b) Risolvere f ' (x) $\geq$ 0 per studiare il segno della derivata prima stabilendo così gli intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente e trovare i cosiddetti "punti stazionari" (i valori di x per cui f'(x)=0) che possono essere di massimo relativo e minimo relativo o di flesso orizzontale (ascendente o discendente).

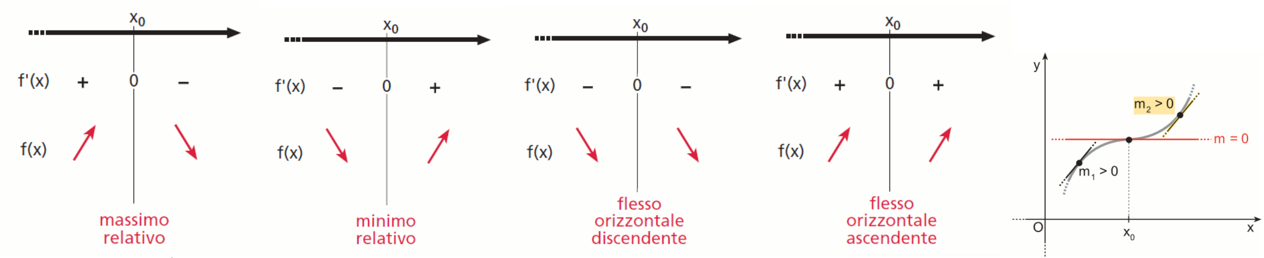
Osservazione 1:

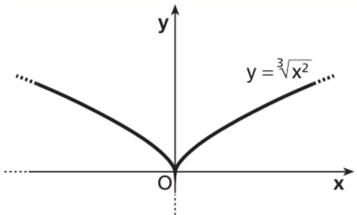
Se la risoluzione di tale disequaz. comporta l'utilizzo di uno schema, in tale schema converrà riportare anche gli eventuali confini finiti del dominio D' della derivata prima, chiedendosi "cosa succede" in corrispondenza di questi estremi: la derivata prima "diventa infinita"? la derivata prima "non esiste perchè derivata sinistra e destra sono distinte" (punto angoloso)?

Osservazione 2:

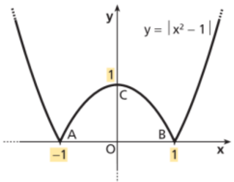
A volte la risoluzione della disequazione f ' (x) > 0 è troppo complicata. In tal caso, si può valutare se sia il caso di rinunciare a tale disequazione. Ricordiamo poi che, per l'analisi dei punti stazionari, esiste anche la risorsa del "metodo della derivata seconda o delle derivate successive".

Analisi dei casi:

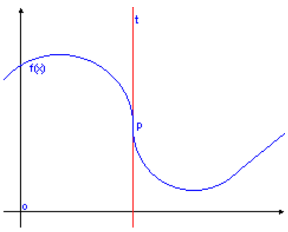




Nelle cuspidi la tangente è infinita ma tende all'infinito positivo a destra e negativo a sinistra o viceversa cioè ho uno studio del segno così (per la fig a lato)



Se invece la derivata è diversa ma finita a destra e a sinistra di un certo punto ho un punto angoloso. Questo capita con funzioni definite per casi come quelle in valore assoluto.



Nei flessi a tangente verticale la tangente è infinita e tende all'infinito negativo a sinistra e destra o positivo da entrambe le parti cioè ho uno studio del segno così (per la fig a lato)

8. Calcolare la derivata seconda y''= f '' (x).

Risolvere f '' (x) > 0 per stabilire gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa e determinare i flessi a tangente obliqua (quelli per cui f '' (x) = 0) ma anche di determinare eventuali punti che risultano di flesso anche senza che in essi si annulli la y''.

Ricordiamo infatti che

- non tutti i punti in cui si annulla la y" risultano poi di flesso;
- e, d'altra parte (*caso non frequentissimo, ma possibile: basti pensare ai flessi verticali*), si possono avere pure dei flessi in cui la y'' non si annulla.

- Se la risoluzione della disequazione f " (x) > 0 comporta l'utilizzo di uno schema, in tale schema converrà riportare anche gli eventuali confini finiti del dominio D" della derivata seconda, chiedendosi "cosa succede" alla y’’ quando x tende a ciascuno di questi estremi.
- A volte la risoluzione della disequazione f " (x) > 0 è troppo complicata. In tal caso, si può valutare se rinunciare a tale disequazione.
- Può talvolta essere conveniente, per la ricerca dei flessi non orizzontali, il "metodo delle derivate successive".

Tabella dei domini delle funzioni elementari

Funzione	Dominio(insieme dei valori per cui la funzione è calcolabile- sono valori di x)	Imagine(insieme dei valori assunti dalla funzione – sono i valori di y)
Y=K	R	{k}
Y=x //Y=x^2 //Y=x^3	R//R//R	R// R^+//R
$y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots$	R	DIPENDE
y=$x^{1/2}$ cioè $y = \sqrt{x}$	{x∈R : x≥0}	R^+
y=$x^{1/3}$	R	R
$y = \sqrt[n]{F(x)},\ \ n$ pari	Deve essere $F(x) \geq 0$	R^+
$y = \sqrt[n]{F(x)},\ \ n$ dispari	Basta che f(x) esista	R
$y = \frac{1}{x^n}$ n>0	R-{0}	R
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	R-{x∈R : g(x)≠0}	R
y=e^x y=e^{-x}	R	R^+
$y = e^{f(x)}$	{x∈R : f(x) ESISTE}	R^+
y=ln x //// $y = \log f(x)$	{x∈R : x>0} ////{x∈R : f(x) >0}	R
y=sen x y=cos x	R	[-1,1]
y=asinx	[-1,1]	{x∈R : -π/2 < x < π/2}
y=acosx	[-1,1]	{x∈R : 0 < x < π}
$y = sen(f(x))$ $y = \cos(f(x))$	{x∈R : f(x) ESISTE}	[-1,1]
y=tan x	{x∈R : x ≠ π/2 +Kπ}	R
y=ctanx	{x∈R : x ≠ 0 +Kπ}	R
y=atanx	R	{x∈R : -π/2 < x < π/2}
y=acotx	R	{x∈R : 0 < x < π}